Автоматика и телемеханика, № 8, 2024

Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. А.С. ШВЕДОВ, д-р физ.-мат. наук (ashvedov@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, Москва)

МОДЕЛЬ БЕКМАННА ДУОПОЛИИ БЕРТРАНА–ЭДЖВОРТА: НОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ[1]

Впервые для изучения олигополии Бертрана–Эджворта (т.е. для изучения конкуренции между фирмами, когда стратегиями фирм являются цены и при этом производственные возможности фирм ограничены) используется понятие слабого активного равновесия, введенное в 80-е гг. XX в. Э.Р. Смольяковым. Найдены все симметричные слабые активные равновесия для основополагающей (хотя и сильно упрощенной) модели дуополии Бертрана–Эджворта, изучавшейся в 60-е гг. XX в. Бекманном. Исследован вопрос существования несимметричных слабых активных равновесий для этой модели.

Ключевые слова: дуополия Бертрана–Эджворта, некооперативная игра, слабо экстремальный профиль стратегий, слабое активное равновесие.

DOI: 10.31857/S0005231024080052, **EDN:** WPFTBS

1. Введение

Хотя из-за своей простоты модель Бекманна [1] (см. также [2]) достаточно далека от реальности, эта модель послужила отправной точкой для многих последующих исследований олигополии Бертрана–Эджворта (см., например, [3–15]). В классической постановке для олигополии Бертрана (когда стратегиями фирм являются цены, а задачей – максимизация прибыли) предполагается, что после объявления цен фирмы смогут произвести столько продукции, что будет удовлетворен весь спрос. Предположение об ограниченности производственных возможностей фирм (в таком случае олигополия Бертрана называется олигополией Бертрана–Эджворта) существенно изменяет ответ на вопрос, какие стратегии будут выбираться фирмами в данной игре. То, что при одних производственных возможностях фирм равновесия Нэша в чистых стратегиях в модели Бекманна существуют, а при других – нет (и поэтому Бекманн ищет равновесия Нэша в смешанных стратегиях), привело к тому, что и во многих последующих работах по олигополии Бертрана–Эджворта

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда экономических исследований академика Н.П. Федоренко (проект № 2022-139).

значительное внимание уделяется равновесиям Нэша в смешанных стратегиях, при том, что практическое значение равновесий в смешанных стратегиях для данных задач меньшее, чем равновесий в чистых стратегиях.

В настоящей работе показано, что если вместо равновесия Нэша использовать слабое активное равновесие (равновесие Нэша является частным случаем этого равновесия), представленное в [16, 17], то равновесия в чистых стратегиях в модели Бекманна существуют при любых производственных возможностях фирм. Нет необходимости использовать для изучения этой модели дуополии равновесия в смешанных стратегиях. В настоящей работе в явном виде дается ответ на вопрос, какие симметричные профили стратегий являются слабыми активными равновесиями, а какие не являются. Исследован вопрос существования несимметричных слабых активных равновесий. Подробнее об олигополии Курно и олигополии Бертрана см., например, [18].

Пусть каждый из индексов i и j принимает значения 1 и 2, $i \neq j$. Игрок i может выбрать свою стратегию x_i из некоторого множества D_i. Через $f_i(x_i, x_j)$ обозначается выигрыш игрока i при профиле стратегий (x_i, x_j).

Определение 1. *Профиль стратегий $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ называется слабо экстремальным для игрока i, если для любой стратегии $x_i \in D_i$ существует стратегия $x_j \in D_j$ такая, что*

$$f_i(x_i, x_j) \leqslant f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).$$

Определение 2. *Профиль стратегий $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ называется слабым активным равновесием, если данный профиль стратегий является слабо экстремальным для любого игрока.*

Понятия слабо экстремального профиля стратегий и слабого активного равновесия введены Э.Р. Смольяковым в 80-е гг. XX в.

Определение 3. *Профиль стратегий (x_i^*, x_j^*) называется равновесием Нэша, если при любом i*

$$f_i(x_i^*, x_j^*) = \max_{x_i \in D_i} f_i(x_i, x_j^*).$$

Нетрудно увидеть, что любое равновесие Нэша является слабым активным равновесием. Обратное, вообще говоря, неверно.

В разделе 2 настоящей работы приводится описание дуополии Бертрана–Эджворта. В разделе 3 дается необходимое и достаточное условие того, чтобы профиль стратегий был слабо экстремальным для одного из игроков при малых производственных возможностях, а в разделе 4 такое же условие дается для больших производственных возможностей. В разделе 5 представлены слабые активные равновесия и обсуждаются практические рекомендации.

2. Дуополия Бертрана–Эджворта

Рассматриваются две фирмы, которые производят однородный товар, затраты на производство считаются нулевыми. Производственные возможности фирм одинаковые, количество товара, которое может произвести каждая фирма, обозначается через c, $0 < c < 1$. Фирмы одновременно объявляют цены, $x_1 \in D_1$ и $x_2 \in D_2$, по которым они будут продавать товар; $D_1 = D_2 = [0, 1]$. Функция спроса предполагается линейной:

$$q = 1 - x. \tag{1}$$

Это означает, что если фирмы объявили одну и ту же цену x, то количество проданного товара определяется формулой (1). Тогда доход каждой фирмы составляет $0{,}5x(1 - x)$ (предполагается, что в этом случае фирмы делят рынок поровну). Если фирмы объявили разные цены, то сначала продает товар фирма, объявившая меньшую цену, эту цену обозначим через x. При $x > 1 - c$ из (1) следует, что $q < c$, поэтому количество товара, проданного фирмой, равняется $1 - x$; в этом случае вторая фирма не продает ничего и доход второй фирмы равен 0. При $x \leqslant 1 - c$ из (1) следует, что $q \geqslant c$, но из-за ограниченности производственных возможностей количество товара, проданного этой фирмой, равняется c. Вторая фирма сталкивается с функцией остаточного спроса следующего вида:

$$\left(1 - \frac{c}{1 - x}\right)(1 - y), \tag{2}$$

где y – цена, объявленная второй фирмой; т.е. вторая фирма в этом случае может продать количество товара, определяемое формулой (2). Экономический смысл такой функции остаточного спроса обсуждается, например, в [5]. Также в [5] дается сравнение (2) и другой возможной формы остаточного спроса. Целью фирмы является максимизация дохода, который рассчитывается как произведение цены и количества проданного товара. Поскольку затраты на производство считаются нулевыми, можно исходить из того, что количество товара, произведенного каждой фирмой, равняется c.

Таким образом, доход фирмы 1 рассчитывается по следующей формуле:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} cx_1 & \text{при} \quad x_1 < x_2,\ x_1 \leqslant 1 - c, \\ x_1(1 - x_1) & \text{при} \quad x_1 < x_2,\ x_1 > 1 - c, \\ cx_1 & \text{при} \quad x_1 = x_2,\ x_2 \leqslant 1 - 2c, \\ 0{,}5x_1(1 - x_1) & \text{при} \quad x_1 = x_2,\ x_2 > 1 - 2c, \\ x_1 \min\left(c, \left(1 - \dfrac{c}{1 - x_2}\right)(1 - x_1)\right) & \\ & \text{при} \quad x_1 > x_2,\ x_2 \leqslant 1 - c, \\ 0 & \text{при} \quad x_1 > x_2,\ x_2 > 1 - c. \end{cases} \tag{3}$$

Доход фирмы 2 равен $f(x_2, x_1)$. Формально не исключается из рассмотрения случай, когда какая-то фирма объявляет нулевую цену. Но оказывается, что при рассматриваемой постановке задачи такой случай малоинтересен (в отличие от классической олигополии Бертрана).

Нетрудно показать (см. [1, 2]), что при $0 < c \leqslant 0{,}25$ профиль стратегий $(1 - 2c, 1 - 2c)$ является равновесием Нэша. В соответствии с (1) это означает, что спрос будет удовлетворен настолько, насколько позволяют производственные возможности фирм. Также нетрудно показать (см. [1, 2]), что при $0{,}25 < c < 0{,}5$ профиль стратегий $(1-2c, 1-2c)$ не является равновесием Нэша.

3. Слабо экстремальные профили при малых производственных возможностях

В дальнейшем используется обозначение

$$\mu = (1-2c)c.$$

Лемма 1. Пусть $0 < c \leqslant \frac{1}{3}$. Профиль $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ является слабо экстремальным для фирмы 1 тогда и только тогда, когда $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geqslant \mu$.

Доказательство. Предположим, что $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geqslant \mu$. Пусть $0 \leqslant x_1 \leqslant 1-2c$. Тогда при любом x_2 имеем

$$f(x_1, x_2) = cx_1 \leqslant (1-2c)c \leqslant f(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Пусть $1-2c < x_1 \leqslant 1-c$. Тогда, рассматривая предел слева, находим

$$\lim_{x_2 \to x_1 - 0} \left(1 - \frac{c}{1-x_2}\right) x_1(1-x_1) =$$
$$= \left(1 - \frac{c}{1-x_1}\right) x_1(1-x_1) = (1-c-x_1)x_1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \to x_1 - 0} f(x_1, x_2) = (1-c-x_1)x_1$$

в силу неравенства $1-c-x_1 < c$. Поскольку функция $\left(1 - \frac{c}{1-x_2}\right)$ является непрерывной и монотонно убывающей при $x_2 < x_1$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x_2 < x_1$ такое, что

$$f(x_1, x_2) \leqslant (1-c-x_1)x_1 + \varepsilon.$$

Значение функции $(1-c-x_1)x_1$ при $x_1 = 1-2c$ равняется $(1-2c)c$. Функция $(1-c-x_1)x_1$ является монотонно убывающей при $x_1 > 1-2c$ (в силу условия $c \leqslant \frac{1}{3}$), т.е. $(1-c-x_1)x_1 < \mu$, поэтому можно выбрать ε так, что $f(x_1, x_2) \leqslant \mu$ при некотором $x_2 < x_1$.

Пусть $1-c < x_1 \leqslant 1$. Тогда $f(x_1, 1-c) = 0 < \mu$.

Теперь докажем, что в случае $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \mu$ профиль $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ не является слабо экстремальным для фирмы 1. Это так, поскольку $f(1-2c, x_2) = \mu$ при любом x_2.

Лемма 1 доказана.

4. Слабо экстремальные профили при больших производственных возможностях

В дальнейшем используется обозначение

$$\nu = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2.$$

Лемма 2. Пусть $\frac{1}{3} < c < 1$. Профиль $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ является слабо экстремальным для фирмы 1 тогда и только тогда, когда $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > \nu$.

Доказательство. Предположим, что $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > \nu$. Пусть $0 \leqslant x_1 \leqslant \max(0, 1-2c)$. Тогда при $x_2 > x_1$

$$f(x_1, x_2) = cx_1 \leqslant c \max(0, 1-2c) \leqslant \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 < f(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Пусть $\max(0, 1-2c) < x_1 \leqslant 1-c$. Обозначим $\varepsilon = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \nu$. Имеем

$$\lim_{x_2 \to x_1 - 0} \left(1 - \frac{c}{1-x_2}\right) x_1(1-x_1) = (1-c-x_1)x_1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \to x_1 - 0} f(x_1, x_2) = (1-c-x_1)x_1$$

в силу неравенства $1-c-x_1 < c$. Функция $(1-c-x_1)x_1$ достигает максимума при $x_1 = \frac{1-c}{2}$ (внутренняя точка отрезка $[\max(0, 1-2c), 1-c]$); максимум равен $\left(\frac{1-c}{2}\right)^2$. Поэтому при любом $x_1 \in (\max(0, 1-2c), 1-c]$ найдется точка $x_2 < x_1$ такая, что

$$f(x_1, x_2) < \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2} < f(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Пусть $1-c < x_1 \leqslant 1$. Тогда $f(x_1, 1-c) = 0 \leqslant \nu$.

Теперь докажем, что в случае $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leqslant \nu$ профиль $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ не является слабо экстремальным для фирмы 1. Достаточно показать, что $f\left(\frac{1-c}{2}, x_2\right) > \nu$ при любом x_2. Заметим, что при $x_1 = \frac{1-c}{2}$ выполняется условие $\max(0, 1-2c) < x_1 \leqslant 1-c$, поскольку $c > \frac{1}{3}$.

Пусть $x_2 < x_1$. Функция $f(x_1, x_2)$, рассматриваемая как функция аргумента x_2, является монотонно невозрастающей при $x_2 \in [0, x_1)$. Как было установлено выше при доказательстве данной леммы, вблизи точки x_1 функция $f(x_1, x_2)$ совпадает с функцией $\left(1 - \frac{c}{1-x_2}\right) x_1(1-x_1)$ и, следовательно, является монотонно убывающей. Поэтому

$$f(x_1, x_2) > (1-c-x_1)x_1 = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2.$$

Пусть $x_2 = x_1$. Тогда

$$f(x_1, x_2) = 0{,}5x_1(1 - x_1) = \frac{1-c}{2} \times \frac{1+c}{4} > \left(\frac{1-c}{2}\right)^2,$$

поскольку $c > \frac{1}{3}$. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда

$$f(x_1, x_2) = c\,\frac{1-c}{2} > \left(\frac{1-c}{2}\right)^2,$$

поскольку $c > \frac{1}{3}$.

Лемма 2 доказана.

5. Слабые активные равновесия

Из (3) нетрудно увидеть, что при $0 < c \leqslant \frac{1}{4}$ выполняются следующие соотношения: $f(x, x) = \mu$ при $x = 1 - 2c$ и $f(x, x) < \mu$ при $x \neq 1 - 2c$; поэтому в силу леммы 1 в этом случае единственный профиль стратегий (x, x), который является слабым активным равновесием, – это $(1 - 2c, 1 - 2c)$; этот же профиль стратегий является и равновесием Нэша.

Теорема 1. Пусть $\frac{1}{4} < c \leqslant \frac{1}{3}$. Профиль стратегий (x, x) является слабым активным равновесием тогда и только тогда, когда $1 - 2c \leqslant x \leqslant 2c$.

Доказательство сводится к применению леммы 1 и проверке условия $0{,}5x(1 - x) \geqslant \mu$, которое эквивалентно условию $1 - 2c \leqslant x \leqslant 2c$.

Теорема 1 доказана.

При $\frac{1}{4} < c \leqslant \frac{1}{3}$ симметричное равновесие в чистых стратегиях $(1-2c, 1-2c)$ найдено в [15], утверждение 4.3, и установлено, что других равновесий в безопасных стратегиях для этой игры нет. Однако из (3) очевидно, что при $\frac{1}{4} < c \leqslant \frac{1}{3}$ для профиля стратегий (0,5, 0,5), который является слабым активным равновесием, доход фирмы выше, чем для профиля стратегий $(1-2c, 1-2c)$.

Теорема 2. Пусть $\frac{1}{3} < c < 1$. Профиль стратегий (x, x) является слабым активным равновесием тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2(1-c)^2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2(1-c)^2}.$$

Доказательство сводится к применению леммы 2 и проверке условия $0{,}5x(1 - x) > \nu$, которое эквивалентно тому, что $x \in (a_1, a_2)$, где a_1 и a_2 – корни квадратного уравнения $0{,}5x(1 - x) = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$.

Теорема 2 доказана.

Можно дать интерпретацию полученных результатов применительно к реальному поведению фирм. При малых производственных возможностях, когда $c \leqslant \frac{1}{4}$, как это следует из симметричного равновесия Нэша в чистых стратегиях $(1 - 2c, 1 - 2c)$, нужно ориентироваться на верхнюю часть кривой спроса и назначать цену $1 - 2c$. При бо́льших производственных возможностях, $c > \frac{1}{4}$, как это вытекает из теорем 1 и 2, следует держать цену 0,5.

Теоремы 1 и 2 относятся к симметричному случаю, т.е. к случаю, когда обе фирмы объявляют одну и ту же цену x. Однако леммы 1 и 2 могут быть использованы и для того, чтобы дать ответ на вопрос, существуют ли несимметричные слабые активные равновесия, т.е. профили стратегий $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, которые являются слабыми активными равновесиями.

Теорема 3. Пусть $0 < c \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда не существует профиля стратегий (x_1, x_2) такого, что $x_1 \neq x_2$, $f(x_1, x_2) \geqslant \mu$, $f(x_2, x_1) \geqslant \mu$.

Доказательство. Пусть считается, что функция f (см. (3)) определена не на единичном квадрате $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$, а на единичном квадрате с вырезанным отрезком $x_1 = x_2$, т.е. игнорируются значения функции f при $x_1 = x_2$.

Заметим, что при $x_1 < 1 - 2c$, $x_2 < x_1$ выполняется неравенство

$$c < \left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right)(1 - x_1).$$

Поэтому на основании (3) для дохода фирмы 1 имеет место неравенство $f(x_1, x_2) < \mu$ при $x_1 < 1 - 2c$, $x_2 \neq x_1$. Аналогично для дохода фирмы 2 имеет место неравенство $f(x_2, x_1) < \mu$ при $x_2 < 1 - 2c$, $x_1 \neq x_2$. Поэтому в дальнейшем при доказательстве теоремы будем рассматривать только стратегии (x_1, x_2) для $x_1 \geqslant 1 - 2c$, $x_2 \geqslant 1 - 2c$.

Заметим, что при $x_1 > 1 - 2c$, $x_2 = 1 - 2c$ выполняется неравенство

$$c > \left(1 - \frac{c}{1 - x_2}\right)(1 - x_1), \tag{4}$$

поэтому в данном случае $f(x_1, x_2) = 0{,}5x_1(1 - x_1)$; отсюда вытекает, что $f(x_1, x_2) < \mu$. При $1 - 2c < x_2 \leqslant 1 - c$, $x_1 > x_2$ также выполняется неравенство (4). Поэтому $f(x_1, x_2) < 0{,}5x_1(1 - x_1) < \mu$. Аналогично $f(x_2, x_1) < \mu$ при $1 - 2c \leqslant x_1 \leqslant 1 - c$, $x_2 > x_1$.

Наконец, в силу (3) при $x_2 > 1 - c$, $x_1 > x_2$ выполняется $f(x_1, x_2) = 0$, и аналогично при $x_1 > 1 - c$, $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2, x_1) = 0$.

Теорема 3 доказана.

В силу леммы 1 из теоремы 3 следует, что при $0 < c \leqslant \frac{1}{4}$ несимметричных слабых активных равновесий нет. Расчеты показывают, что при бóльших значениях c несимметричные слабые активные равновесия существуют. Пусть γ – это отношение числа профилей (x_1, x_2), $x_1 > x_2$, которые являются слабыми активными равновесиями, к общему числу профилей (x_1, x_2), $x_1 > x_2$ (при использовании некоторой достаточно мелкой сетки). В таблице для некоторых значений c приведены γ.

Значения γ при различных c

c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
γ	0,0063	0,1113	0,2059	0,2586	0,2684	0,2349	0,1506

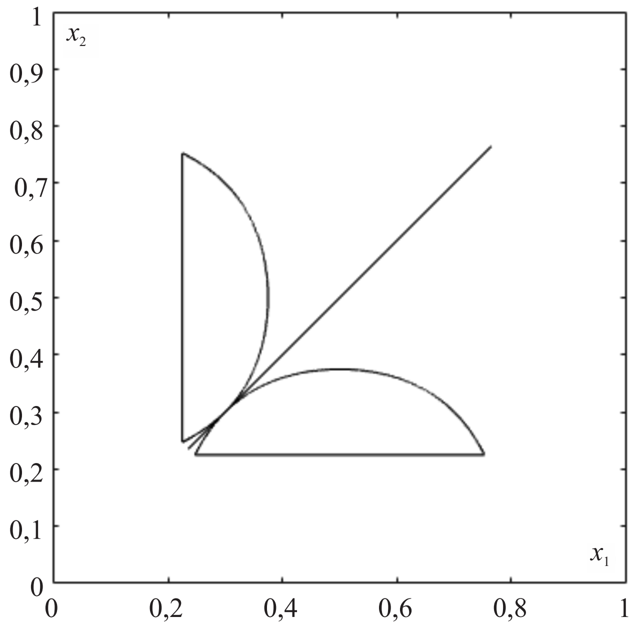

Рис. 1. Слабые активные равновесия при $c = 0{,}4$.

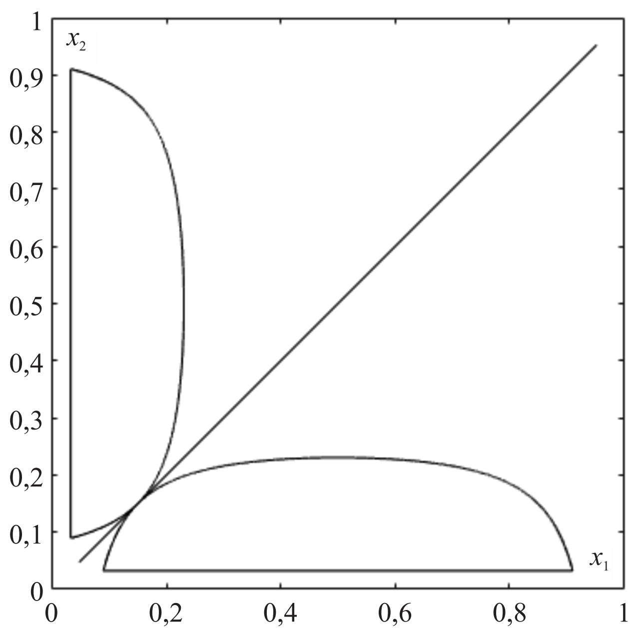

Рис. 2. Слабые активные равновесия при $c = 0{,}7$.

Из рис. 1, 2 видно, что множество профилей (x_1, x_2), представляющих собой слабые активные равновесия, состоит из части диагонали единичного квадрата (симметричные слабые активные равновесия) и двух примыкающих к этой диагонали лунок (несимметричные слабые активные равновесия).

6. Заключение

Изучение олигополии Бертрана–Эджворта имеет большое практическое значение. Именно такой подход используется в ряде стран властями при анализе политики в области конкуренции (см. [13]). В настоящей работе впервые для изучения олигополии Бертрана–Эджворта применяется понятие слабого активного равновесия. Использование данного понятия позволяет рассматривать только равновесия в чистых стратегиях и не рассматривать равновесия в смешанных стратегиях, как это приходится делать при использовании понятия равновесия Нэша. Найдены все симметричные слабые активные равновесия для модели Бекманна дуополии Бертрана–Эджворта, исследован вопрос о существовании несимметричных слабых активных равновесий.

За исключением тех случаев, когда слабое активное равновесие совпадает с равновесием Нэша в чистых стратегиях, слабое активное равновесие оказывается не единственным. В связи с этим возникает интересный вопрос о сужении понятия слабого активного равновесия, указании каких-то дополнительных свойств, чтобы выделить из всего множества слабых активных равновесий единственное. Таким сужением является, например, понятие сильного активного равновесия, введенное в [17]. Однако, скорее всего, для олигополии Бертрана–Эджворта последнее понятие не совсем подходящее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beckmann M.J. (with the assistance of D. Hochstadter)* Edgeworth–Bertrand duopoly revisited / Oper. Res. – Verfahren III (R. Henn, Ed.) Meisenheim: Verlag Anton Hein. 1965. P. 55–68.
2. *Cheviakov A.F., Hartwick J.M.* Beckmann's Edgeworth–Bertrand duopoly example revisited // Int. Game Theory Rev. 2005. V. 7. P. 461–472.
3. *Levitan R.E., Shubik M.* Price duopoly and capacity constraints // Int. Econom. Rev. 1972. V. 13. P. 111–122.
4. *Kreps D.M., Scheinkman J.A.* Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes // Bell J. Econom. 1983. V. 14. P. 326–337.
5. *Davidson C., Deneckere R.* Long-run competition in capacity, short-run competition in price, and the Cournot model // Rand J. Econom. 1986. V. 17. P. 404–415.
6. *Tasnadi A.* Existence of pure strategy Nash equilibrium in Bertrand–Edgeworth oligopolies // Econom. Lett. 1999. V. 63. P. 201–206.
7. *Lepore J.J.* Cournot outcomes under Bertrand–Edgeworth competition with demand uncertainty // J. Mathem. Econom. 2012. V. 48. P. 177–186.
8. *Sun C.-J.* Dynamic price dispersion in Bertrand–Edgeworth competition // Int. J. Game Theory. 2017. V. 46. P. 235–261.
9. *Chen Z., Li G.* Horizontal mergers in the presence of capacity constraints // Econom. Inquiry. 2018. V. 56. P. 1346–1356.
10. *Grub J.T.* Can mergers lead to partial collusion? Introducing heterogeneous discount factors to a Bertrand–Edgeworth model // Eur. Compet. J. 2020. V. 16. P. 512–530.
11. *Somogyi R.* Bertrand–Edgeworth competition with substantial horizontal product differentiation // Math. Soc. Sci. 2020. V. 108. P. 27–37.

12. *Bos I., Vermeulen D.* On pure strategy Nash equilibria in price-quantity games // J. Mathem. Econom. 2021. V. 96. № 102501.

13. *Edwards R.A., Routledge R.R.* Information, Bertrand–Edgeworth competition and the law of one price // J. Mathem. Econom. 2022. V. 101. № 102658.

14. *Bos I., Marini M.A.* Oligopoly pricing: The role of firm size and number // Games. 2023, V. 14. № 3.

15. *Искаков А.Б., Искаков М.Б.* Равновесия в безопасных стратегиях в ценовой дуополии Бертрана–Эджворта // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. № 2. С. 42–59.

16. *Смольяков Э.Р.* Экстремальность и равновесность относительно заданных функций и игровые модели. 1 // А и Т. 1983. № 3. С. 101–107.

17. *Смольяков Э.Р.* Экстремальность и равновесность относительно заданных функций и игровые модели. 2 // А и Т. 1983. № 4. С. 41–49.

18. *Шведов А.С.* Олигополия Курно: выбор стратегий при неопределенности и другие вопросы // Проблемы управления. 2023. № 5. С. 23–39.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 27.12.2023

После доработки 27.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024